

52-70
P-652
K-156
C-653
7

СОБРАНИЕ

ПРОТОКЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ

СЕКЦИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

при

ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ТОМЪ 7-й.

ЗАСѢДАНІЯ LXXIX—LXXXVIII.

(СЪ СЕНТЯБРЯ 1888 ПО МАЙ 1889 Г.).

КАЗАНЬ.

Типографія Императорскаго Университета.

1889.



СОБРАНИЕ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ

СЕКЦИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

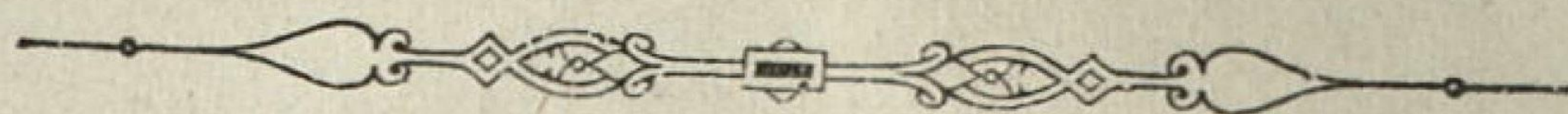
при

ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ТОМЪ 7-й.

ЗАСѢДАНІЯ LXXIX—LXXXVIII.

(СЪ СЕНТЯБРЯ 1888 ПО МАЙ 1889 Г.).



КАЗАНЬ.

Типографія Императорскаго Университета.

1889.





QC

1

K-156

C-652

Печатано по опредѣленію Общества Естествоиспытателей при
Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

Президентъ *А. Штукенбергъ*.



34-600/35 *

Содержаніе 7-го тома.

Стр.

А) Списокъ членовъ секціи въ іюль 1889 г. . . .	VI—XVII
В) Протоколы:	
79-го засѣданія (10 сентября 1888 г.) . . .	1—4
80-го — (8 октября 1888 г.) . . .	115—117
81-го — (12 ноября 1888 г.) . . .	221—222
82-го — (3 декабря 1888 г.) . . .	269
83-го — (7 января 1889 г.) . . .	341
84-го — (15 февраля 1889 г.) . . .	341—343
85-го — (11 марта 1889 г.) . . .	343—344
86-го — (1 апрѣля 1889 г.) . . .	393—395
87-го — (15 апрѣля 1889 г.) . . .	395—396
88-го — (7 мая 1889 г.) . . .	396—401
С) Отчетъ секціи за 9-й (188 ^{8/9}) годъ. . . .	416—423
D) Сообщенія, помѣщенныя въ приложеніяхъ къ протоколамъ:	
1) П. В. Преображенскаго — „Принципъ узловыхъ точекъ“.	5—41
2) Н. П. Слугинова — „О теплѣ вольтовой дуги“.	42—114
3) М. В. Постникова — „Этюды по теоріи кривыхъ четвертаго порядка“.	118—158
4) Г. Н. Шебуева — „Объ опредѣленіи величины и направленія силы однороднаго магнитнаго поля“.	159—220

- 5) *И. П. Долбни*—„О критеріи Galois раз-
рѣшимости алгебраическихъ уравненій въ ради-
калахъ.“ 223—240
- 6) *Г. Н. Шебуева*—„Къ теоріи упругаго по-
слѣдѣйствія“ 241—259
- 7) *П. С. Портыкаго*—„По поводу брошюры
г. Волкова о логическомъ исчисленіи“ 260—268
- 8) *П. П. Граве*—„О параболическомъ интер-
полированіи по способу наименьшихъ квадратовъ“ . 270—322
- 9) *Θ. П. Лаптева*—„О гальваническихъ эле-
ментахъ съ магніемъ“ 323—339
- 10) *Н. П. Слушнова*—„Оптическія рулетты“ 350—359
- 11) *Н. П. Слушнова* — „Скорость распро-
страненія колебательнаго движенія“ 360—363
- 12) *И. П. Долбни*—„О сложеніи эллиптиче-
скихъ аргументовъ 1-го, 2-го и 3-го вида“ . . . 364—373
- 13) *Г. Н. Шебуева* — „О вліяніи упругаго
послѣдѣйствія на колебанія струны“ 374—388
- 14) *А. К. Жбиковскаго*—„Къ вопросу о на-
хожденіи высшаго предѣла дѣйствительныхъ кор-
ней уравненія“ 389—392
- 15) *Н. П. Казанкина*—„Замѣтка о гальвани-
ческомъ элементѣ съ двухромокислымъ натромъ“ . 403—406
- 16) *К. И. Котелова*—„Новый способъ раз-
ложенія голоморфной функціи въ безконечное
произведеніе 407—415
- Е) *Сообщенія, прореферированныя, или же напечатанныя
въ протоколахъ:*
- 1) *П. И. Свѣшниковъ*—„Объ опредѣленіи ко-
эф. расширенія изъ наблюденій надъ качаніями
маятниковъ“ 3

- 2) Д. А. Гольдгаммера—„Объ электродинамических колебаніяхъ“ 116
- 3) Н. П. Казанкина—„О Павловской магнитно-метеорологической обсерваторіи“ 117
- 4) Д. А. Гольдгаммера—„Объ опытахъ Кундта надъ опредѣленіемъ показателей преломленія металлическихъ призмъ“ 222
- 5) Н. В. Нечаева—„О рѣшеніи уравненій электричествомъ“ 369
- 6) М. М. Фролова—„О волшебныхъ кругахъ“ 344
- 7) Н. А. Миславскаго—„Демонстрація телефонныхъ токовъ при помощи фізіологическаго реоскопа“ 393
- 8) Г. Н. Шебуева—„Замѣтка объ извлеченіи корней изъ алгебраическихъ многочленовъ“ . . . 394—395
- 9) Г. М. Вишневскаго—„Рецензія по поводу задачника Д. Мартынова“ 398
- 10) Θ. М. Суворова—„Нѣсколько словъ о методикѣ Г. М. Вишневскаго“ 400
- Г) Прочія сообщенія, читанныя въ засѣданіяхъ секціи:
- 1) Д. А. Гольдгаммера—„Нѣсколько замѣчаній по поводу статьи г. Ефимова о магнетизмѣ газовъ“ 222
- 2) Н. А. Миславскаго—„О фотохимическихъ процессахъ въ сѣтчатой оболочкѣ глаза“ 341
- 3—4) Д. А. Гольдгаммера—„Этюды по теоріи свѣта“ 342, 393
- 5) Г. Н. Шебуева—„О варіированіи системы векторовъ“ 344
- 6—7) Д. А. Гольдгаммера—„О вліяніи намагничиванія на сопротивленіе желѣза и никкеля“ 393, 402

8) *П. С. Портькаго*—„О новомъ способѣ со-
ставленія таблицъ простыхъ чиселъ и дѣлителей“ 396

9) *А. В. Васильева*—„Обзоръ русской мат.
литературы по теоріи непрерывн. алгебр. дробей
за 86—87 годы“ 398

Демонстрированіе Н. П. Слугиновымъ, Н. П.
Казанкинымъ и К. В. Кебелемъ новыхъ прибо-
ровъ физическаго кабинета: 4, 343

G) *Текущія дѣла секціи:*

1) Баллотированіе новыхъ членовъ . 1, 115, 221, 344

2) Просьба секціи о пособіи изъ суммъ Го-
суд. Казначейства 1

3) Оставленіе П. С. Порѣцкимъ обязанно-
стей секретаря секціи и сдѣланныя имъ пожер-
твованія въ бібліотеку секціи 2

4) Исходъ ходатайства секціи о пособіи. . 342

5) Выборы администраціи секціи на 10 годъ 398

6) Умершіе члены секціи; біографическія свѣ-
дѣнія объ А. П. Орловѣ 396

Правила для соисканія преміи имени В. П.
Мошнина 345

СПИСОКЪ ЧЛЕНОВЪ
СЕКЦИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ
Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ
Казанскомъ Университетѣ

въ іюлѣ 1889 г.

- 1) *Адамантовъ*, Дмитрій Леонтьевичъ, учитель 3-й гимназіи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 2) *Адріановъ*, Василій Васильевичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).
- 3) *Александровъ*, Александръ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 11 октября 1880 г.).
- 4) *Альбрехтъ*, Давыдъ Ивановичъ, инспекторъ студентовъ Казанскаго Универс. (съ 10 сент. 1888 г.).
- 5) *Андреевъ*, Михаилъ Кирилловичъ, учитель реального учил. въ Самарѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 6) *Ардашевъ*, Александръ Александровичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 25 октября 1886 г.).
- 7) *Аристовъ*, Иванъ Николаевичъ, губернский земскій гласный въ Казани (съ 17 января 1887 г.).
- 8) *Багаевъ*, Александръ Антоновичъ, военный инженеръ въ Свеаборгѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 9) *Блажеевскій*, Ромуальдъ Осиповичъ, приватъ доцентъ Казанск. универ. (съ 10 сентября 1888 г.).
- 10) *Бобровниковъ*, Николай Алексѣевичъ, учитель иностранческой учит. семин. въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).

- 11) *Бобынинъ*, Викторъ Викторовичъ, приватъ-доцентъ университета въ Москвѣ (съ 28 сентября 1885 г.).
- 12) *Богородицкій*, Василій Алексѣевичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 14 мая 1883 г.).
- 13) *Большагаринскій*, Владиміръ Константиновичъ, учитель реального училища въ Выборгѣ (съ 29 сент. 1884 г.).
- 14) *Бравинъ*, Николай Александровичъ, учитель гимназіи въ Уфѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 15) *Васильевъ*, Александръ Васильевичъ, профес. университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 16) *Вальтеръ*, Адамъ Яковлевичъ, учитель гимназіи въ Астрахани (съ 30 сент. 1886 г.).
- 17) *Веретенниковъ*, Владиміръ Ивановичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).
- 18) *Вильковскій*, Эммануилъ Яковлевичъ, учитель женской гимназіи въ Казани (съ 24 сентября 1883 г.).
- 19) *Виноградскій*, Владиміръ Николаевичъ, директоръ реал. училища въ Астрахани (съ 24 сентября 1883 г.).
- 20) *Витковскій*, Василій Васильевичъ, полковникъ генеральнаго Штаба въ С.-Петербургѣ (съ 29 октября 1883 г.).
- 21) *Вишневскій*, Гурій Матвѣевичъ, учитель учительской семинаріи въ Самарѣ (съ 29 сентября 1884 г.).
- 22) *Волковъ*, Михаилъ Сергѣевичъ, учитель 2-го реального училища въ С.-Петербургѣ (съ 28 сент. 1885 г.).
- 23) *Галузевскій*, Иванъ Ивановичъ, кандидатъ математики въ Полтавѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 24) *Гезехусъ*, Николай Александровичъ, профессоръ Томскаго унив. (съ 10 сентября 1888 г.).
- 25) *Генкель*, Августъ Августовичъ, директоръ реального училища въ Сарапулѣ (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 26) *Голубевъ*, Петръ Александровичъ, учитель математики въ Томскѣ (съ 17 мая 1880 г.).

- 27) *Гольдгаммеръ*, Дмитрій Александровичъ, приватъ-доцентъ Казанск. универ. (съ 10 сентября 1888 г.).
- 28) *Горталовъ*, Александръ Петровичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 29) *Громека*, Ипполитъ Степановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 30) *Дмитріевскій*, Михаилъ Михайловичъ, директоръ реальн. училища въ Перми (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 31) *Долбня*, Иванъ Петровичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).
- 32) *Доловъ*, Алексѣй Ѳедоровичъ, кандидатъ математ. наукъ (съ 13 апрѣля 1885 г.).
- 33) *Дубяго*, Дмитрій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 29 окт. 1883 г.).
- 34) *Егоровъ*, Ѳедоръ Ивановичъ, преподаватель учительскаго института въ Москвѣ (съ 12 ноября 1888 г.).
- 35) *Жбиковскій*, Антонъ Ксаверьевичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 36) *Жилевичъ*, Антонъ Флоріановичъ, учитель реального училища въ Перми (съ 26 сентября 1887 г.).
- 37) *Жуковскій*, Николай Егоровичъ, профессоръ университета въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 38) *Заибаловъ*, Борисъ Павловичъ, непремѣн. членъ присутств. по крестьян. дѣламъ въ Цивильскѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 39) *Залезскій*, Владиміръ Андреевичъ, учитель реального училища въ Сарапулѣ (съ 24 октября 1883 г.).
- 40) *Здзярскій*, Антонъ Феликсовичъ, инженеръ путей сообщенія въ С.-Петербургѣ (съ 28 сент. 1885 г.).
- 41) *Зелинскій*, Иванъ Ивановичъ, учитель 2-й гимназіи въ Казани (съ 26 октября 1885 г.).

42) *Фонз-Зиленз-Корнз*, Михаилъ Ксаверьевичъ, военный инженеръ въ Ташкентѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).

43) *Износское*, Иліодоръ Александровичъ, директоръ Казанск. реальн. учил. (съ 26 апрѣля 1882 г.).

44) *Имшенникъ*, Іосифъ Антоновичъ, директоръ 2-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

45) *Ицмсонъ*, Карлъ, редакторъ „Математ. Библіотеки“ въ Берлинѣ (съ 28 сент. 1885 г.).

46) *Кадыжъ*, Петръ Христофоровичъ, учитель гимназіи въ Томскѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

47) *Казаковъ*, Василій Владиміровичъ, учитель женской гимназіи въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

48) *Казанкинъ*, Николай Петровичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).

49) *Канонниковъ*, Иннокентій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

50) *Кебель*, Карлъ Веніаминовичъ, лаборантъ физич. кабинета университета въ Казани (съ 21 октября 1882 г.).

51) *Киртєвъ*, Василій Ивановичъ, инспекторъ гимназіи въ Царицинѣ (съ 20 сентября 1880 г.).

52) *Клейберъ*, Іосифъ Андреевичъ, приватъ-доцентъ университета въ С.-Петербургѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

53) *Ковальскій*, Александръ Маріановичъ, ассистентъ при обсерваторіи университета въ Казани (съ 25 сентября 1882 г.).

54) *Колли*, Робертъ Андреевичъ, профессоръ Петровской Академіи въ Москвѣ (съ 4 апрѣля 1881 г.).

55) *Корнухъ-Троицкій*, Яковъ Петровичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 26 сентября 1887 г.).

56) *Котеловъ*, Константинъ Ивановичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).

57) *Котельниковъ*, Александръ Петровичъ, преподаватель Ксеніинской женской гимназ. въ Каз. (съ 10 сентября 1888 г.).

58) *Котельникова*, Елизавета Петровна, учительница женской Ксеніинской гимназіи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).

59) *Красновъ*, Изанъ Ковстантиновичъ, чиновникъ въ домства финансовъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).

60) *Кривошеинъ*, Филиппъ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 26 сентября 1887 г.)

61) *Кривцовъ*, Яковъ Васильевичъ, архитекторъ въ Рязани (съ 24 сентября 1883 г.).

62) *Круликевичъ*, Эваристъ Эваристовичъ, канд. мат., инженеръ пут. сообщ. (съ 12 ноября 1888 г.).

63) *Кузнецкій*, Николай Васильевичъ, учитель сельско-хозяйствен. училища на фермѣ близъ Казани (съ 20 сентября 1880 г.).

64) *Ленсъ*, Иванъ Андреевичъ, инспекторъ реального училища въ Казани (съ 13 апрѣля 1885 г.).

65) *Ливенъ*, Эмилій Павловичъ, помощникъ инспектора кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгор. (съ 28 мая 1887 г.).

66) *Линдеманъ*, Эдуардъ Эдуардовичъ, ученый секретарь обсерваторіи въ Пулково (съ 25 сентября 1883 г.).

67) *Лишевъ*, Викторъ Александровичъ, артиллерійскій офицеръ въ Казани (съ 11 октября 1880 г.).

68) *Лобовиковъ*, Георгій Ивановичъ, учитель гимназіи въ Вязьмѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

69) *Лобовиковъ*, Сергѣй Ивановичъ, учитель Астраханской гимн. (съ 8 окт. 1888 г.).

70) *Ломоносовъ*, Петръ Федоровичъ, учитель математики (съ 4 апрѣля 1880 г.).

71) *Лопаткинъ*, Михаилъ Ивановичъ, наблюдатель метеоролог. обсерваторіи университета въ Казани (съ 22 ноября 1886 г.).

72) *Дукнижій*, Всеволодъ Всеволодовичъ, начальникъ порохового завода въ Казани (съ 11 октября 1880 г.).

73) *Лючевъ*, Петръ Герасимовичъ, канд. мат. въ Баку (съ 12 ноября 1888 г.).

74) *Максимовичъ*, Владиміръ Павловичъ, профессоръ университета въ Кіевѣ (съ 26 сентября 1881 г.).

75) *Максимовичъ*, Сергѣй Павловичъ, инженеръ путей сообщенія въ С.-Петербургѣ (съ 24 сентября 1883 г.).

76) *Максимовъ*, Николай Андреевичъ, учитель татарской учительской школы въ Казани (съ 29 октября 1883 г.).

77) *Малешевскій*, Болеславъ Ѳомичъ, главный контролеръ юго-запад. жел. дорогъ въ С.-Петербургѣ (съ 6 февр. 1888 г.).

78) *Мальцевъ*, Михаилъ Михайловичъ, учитель учительскаго института въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).

79) *Мальцевъ*, Александръ Михайловичъ, учитель гимназіи въ Царицинѣ (съ 29 октября 1883 г.).

80) *Мещерскій*, Иванъ Всеволодовичъ, консерваторъ кабинета практич. механики въ С.-Петербург. университетѣ (съ 28 мая 1888 г.).

81) *Милославская*, Александра Ивановна, учительница женской прогимназіи въ Глазовѣ (съ 28 апрѣля 1884 г.).

82) *Мининъ*, Александръ Петровичъ, преподаватель 2-й женской гимназіи въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

83) *Мининъ*, Викторъ Петровичъ, преподаватель 3-й мужской гимназіи въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

84) *Миславскій*, Николай Александровичъ, прозекторъ Физіолог. Каб. Каз. унив. (съ 8 октября 1888 г.).

85) *Михайловъ*, Петръ Александровичъ, учитель реального училища въ Елабугѣ (съ 21 октября 1882 г.).

86) *Міончинскій*, Тимофей Андреевичъ, офицеръ Артиллер. Акад. (съ 12 ноября 1888 г.).

86) *Мокроусовъ*, Василій Семеновичъ, кандидатъ математики (съ 20 декабря 1886 г.).

88) *Неклюдовъ*, Сергѣй Михайловичъ, членъ Совѣта дворянскаго банка въ С.Петербургѣ (съ 22 окт. 1886 г.).

89) *Некрасовъ*, Владиміръ Леонидовичъ, кандидатъ математики въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).

90) *Нечаевъ*, Николай Владиміровичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).

91) *Никоновъ*, Петръ Павловичъ, учитель женской гимназіи въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

92) *Обуховъ*, Дмитрій Григорьевичъ, учитель реального училища въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

93) *Орловъ*, Сергѣй Павловичъ, лекторъ англ. яз. при университетѣ въ Казани (съ 26 ноября 1883 г.).

94) *Охотниковъ*, Никифоръ Михайловичъ, учитель чувашскаго училища въ Симбирскѣ (съ 23 ноябр. 1885 г.).

95) *Павленко*, Варлаамъ Павловичъ, учитель 2-го кадетскаго корпуса въ С.-Петербургѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

96) *Павловъ*, Александръ Петровичъ, учитель женской гимназіи въ Екатеринбургѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

97) *Пактовскій*, Иванъ Гавриловичъ, учитель учительской семинаріи въ Бирскѣ (съ 11 декабря 1882 г.).

98) *Пантелѣевскій*, Александръ Никитичъ, инспекторъ реал. училища въ Вяткѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).

99) *О. Первушинъ*, Іоаннъ Михѣевичъ, священникъ Шадринск. уѣзда Пермск. губ. (съ 11 марта 1889 г.).

100) *Пермяковъ*, Сергѣй Ефремовичъ, кандидатъ математ. наукъ (съ 29 сент. 1884 г.).

101) *Перуанскій*, Александръ Аѳанасіевичъ, учитель реального училища въ Астрахани (съ 18 апрѣля 1887 г.).

102) *Перцовъ*, Петръ Петровичъ, уѣздный предводитель дворянства въ Казани (съ 1 мая 1888 г.).

103) *Покровскій*, Александръ Николаевичъ, учитель гимназіи въ Костромѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

104) *Покровскій*, Василій Васильевичъ, учитель Введенской гимназіи въ С.-Петербургѣ (съ 28 мая 1888 г.).

105) *Покровскій*, Петръ Михайловичъ, приватъ доцентъ Моск. унив. (съ 12 ноября 1888 г.).

106) *Поветика*, Петръ Романовичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 30 сент. 1886 г.).

107) *Пономаревъ*, Дмитрій Григорьевичъ, учитель женской гимназіи въ Самарѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

108) *Порфирьевъ*, Николай Ивановичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 30 сент. 1886 г.).

109) *Портукій*, Платонъ Сергѣевичъ, докторъ астрономіи (съ 17 мая 1880 г.).

110) *Постниковъ*, Модестъ Васильевичъ, учитель гимназіи въ Астрахани (съ 23 ноября 1885 г.).

111) *Потаповъ*, Николай Гавриловичъ, помощникъ попечителя Казанскаго учебнаго округа (съ 27 апр. 1885 г.).

112) *Преображенскій*, Владиміръ Васильевичъ, профессоръ Новороссійск. унив. (съ 27 окт. 1884 г.).

113) *Преображенскій*, Петръ Васильевичъ, учитель 4-ой гимназіи въ Москвѣ (съ 28 сент. 1885 г.).

114) *Пушковъ*, Николай Михайловичъ, учитель прогимназіи въ Алатырѣ (съ 24 сентября 1883 г.).

115) *Ренчицкій*, Степанъ Дмитріевичъ, директоръ реального училища въ станицѣ Урюпинской, въ землѣ войска донскаго (съ 6 февр. 1888 г.).

- 116) *Рейнгардтз*, Николай Викторовичъ, присяжн. повѣренный въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).
- 117) *Рожанскій*, Василій Михайловичъ, учитель ино-родческой учит. семин. въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 118) *Россевичъ*, Юлій Николаевичъ, артиллерійскій офицеръ въ С.-Петербургѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).
- 119) *Ръшетинъ*, Николай Лаврентьевичъ, военный инже-неръ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 120) *Рябининъ*, Петръ Николаевичъ, учитель реальн. училища въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 221) *Салинъ*, Генрихъ Андреевичъ, учитель 3-й гимна-зіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 122) *Свѣнцицкій*, Михаилъ Іосифовичъ, податной ин-спекторъ въ Казани (съ 26 окт. 1885 г.).
- 123) *Свѣшниковъ*, Павелъ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Троицкѣ, Оренб. губ. (съ 26 сентября 1887 г.).
- 124) *Сегель*, Михаилъ Соломоновичъ, кандидатъ матем. наукъ въ Казани (съ 25 сентября 1882 г.).
- 125) *Сергѣевъ*, Михаилъ Порфирьевичъ, кандидатъ ма-тематики (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 126) *Сколовубовъ*, Иванъ Лукичъ, канд. мат. въ Казани (съ 12 ноября 1888 г.).
- 127) *Сластниковъ*, Семенъ Ивановичъ, кандидатъ мате-матики въ Казани (съ 20 сентября 1880 г.).
- 128) *Слушиновъ*, Николай Петровичъ, профессоръ уни-верситета въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).
- 129) *Смирновъ*. Антонинъ Андреевичъ, учитель гимна-зіи въ Самарѣ (съ 25 окт. 1886 г.).
- 130) *Смирновъ*, Евгеній Александровичъ, кандидатъ ма-темат. наукъ, въ Иркутскѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).
- 131) *Соколовъ*, Василій Львовичъ, преподаватель Ар-хангельск. Семинаріи (съ 12 ноябр. 1888 г.).

132) *Соловьевъ*, Аркадій Матвѣевичъ, учитель реал. училища въ Вольскѣ (съ 17 мая 1880 г.).

133) *Старковъ*, Алексѣй Петровичъ, въ Одессѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

134) *Стефановичъ*, Яковъ Аполлоновичъ, учитель учительскаго института въ Казани (съ 26 апрѣля 1882 г.).

135) *Стрекаловъ*, Викторъ Николаевичъ, учитель 2-го кадетск. корпуса въ С.-Петербургѣ (съ 23 нояб. 1885 г.).

136) *Суворовъ*, Ѳедоръ Матвѣевичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

137) *Сумцовъ*, Владиміръ Николаевичъ, канд. мат. въ Москвѣ (съ 10 сент. 1888 г.).

138) *Тлуцкиовскій*, Леонидъ Викентьевичъ. канд. мат. въ Казани (съ 8 окт. 1888 г.).

139) *Толмачевъ*, Николай Александровичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 26 сентября 1887 г.).

140) *Тороповъ*, Константинъ Александровичъ, учит. гимн. въ Перми (съ 12 ноябр. 1888 г.).

141) *Фалинъ*, Ѳедоръ Николаевичъ, военный инженеръ въ Нижнемъ-Новгородѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

142) *Федоровъ*, Евгеній Степановичъ, военный инженеръ въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).

143) *Флавицкій*, Флавіанъ Михайловичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

144) *Фроловъ*, Михаилъ Михеевичъ, инженеръ-генераль въ С.-Петербургѣ (съ 26 апр. 1886 г.).

145) *Халтулари*, Викторъ Константиновичъ, инспекторъ кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгородѣ (съ 28 мая 1888 г.).

136) *Хижняковъ*, Михаилъ Прокофьевичъ; учитель гимназіи въ Самарѣ (съ 13 декабря 1880 г.).

147) *Хохряковъ*, Яковъ Андреевичъ, учитель реального училища въ Сарапулѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

- 148) *Цомакіонъ*, Анна Ивановна, учительница математики, (съ 17 февраля 1883 г.).
- 149) *Чилиръ*, Генрихъ Игнатьевичъ, учитель маріинской гимназіи въ Казани (съ 25 сент. 1882 г.).
- 150) *Шанторинъ*, Василій Григорьевичъ, инспекторъ гимназіи въ Екатеринодарѣ (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 151) *Шебуевъ*, Георгій Николаевичъ, учитель реальн. училища въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 152) *Ширковъ*, Алексѣй Петровичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).
- 153) *Ширяевъ*, Владиміръ Александровичъ, губерн. землемѣръ въ Казани (съ 25 февраля 1884 г.).
- 154) *Шнейдеръ*, Яковъ Григорьевичъ, ветеринарный врачъ (съ 17 мая 1880 г.).
- 155) *Шулинскій*, Александръ Михайловичъ, учитель гимназіи въ Ташкентѣ (съ 25 сентября 1882 г.).
- 156) *Эккерманъ*, Александръ Христіановичъ, учит. маріинской женской гимназіи въ Казани (съ 17 февраля 1883 г.).
- 157) *Энгельгартъ*, Василій Павловичъ, астрономъ въ Дрезденѣ (съ 23 февраля 1885 г.).
- 158) *Якимовъ*, Владиміръ Петровичъ, учитель гимназіи въ Екатеринбургѣ (съ 30 сент. 1886 г.).
- 159) *Якобій*, Аркадій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 23 ноября 1885 г.).
- 160) *Янишевскій*, Ерастъ Петровичъ, докторъ математики (съ 17 мая 1880 г.).
- 161) *Янишевскій*, Николай Ерастовичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).
- 162) *Оедотченко*, Александръ Оедоровичъ, учитель гимназіи въ Симбирскѣ (съ 13 декабря 1880 г.).
-

- 148) Николай, Анна Николаевна, унтер-офицер
 (с 17 февраля 1883 г.)
 149) Александр, Генрих Николаевич, унтер-офицер
 (с 25 сентября 1882 г.)
 150) Александр, Павел Григорьевич, инженер
 (с 4 апреля 1880 г.)
 151) Федор, Георгий Николаевич, унтер-офицер
 (с 4 апреля 1880 г.)
 152) Александр, Александр Петрович, унтер-офицер
 (с 1 мая 1888 г.)
 153) Александр, Александр Александрович, унтер-офицер
 (с 25 февраля 1884 г.)
 154) Александр, Александр Григорьевич, ветеринарный
 врач (с 17 мая 1880 г.)
 155) Александр, Александр Михайлович, унтер-офицер
 (с 25 сентября 1882 г.)
 156) Александр, Александр Григорьевич, унтер-офицер
 (с 17 февраля 1883 г.)
 157) Александр, Павел Павлович, вестник
 (с 23 февраля 1885 г.)
 158) Александр, Владимир Петрович, унтер-офицер
 (с 30 сентября 1886 г.)
 159) Александр, Александр Николаевич, профессор
 (с 23 ноября 1882 г.)
 160) Александр, Александр Петрович, доктор
 (с 17 мая 1880 г.)
 161) Александр, Николай Евстафьевич, кандидат
 (с 25 октября 1886 г.)
 162) Александр, Александр Александрович, унтер-офицер
 (с 13 декабря 1880 г.)

О КРИТЕРІИ GALOIS

разрѣшимости алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ.

И. П. Долбни.

(Сообщеніе, читанное 10 Сентября 1888 г. въ 79 засѣданіи секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ).

§ 1. Извѣстно, что корни всякаго кубическаго уравненія

$$x^3 + px + q = 0$$

выражаются формулами.

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= R_1^{\frac{1}{3}} + R_2^{\frac{1}{3}} \\ x_1 &= \alpha R_1^{\frac{1}{3}} + \alpha^2 R_2^{\frac{1}{3}} \\ x_2 &= \alpha^2 R_1^{\frac{1}{3}} + \alpha R_2^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} (1)$$

гдѣ R_1 и R_2 суть корни квадратнаго уравненія

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

съ раціональными коэффициентами.

Абель первый замѣтилъ ⁽¹⁾, что корни всякаго неприводимаго уравненія, разрѣшимаго въ радикалахъ, должны представляться въ формѣ, подобной (1). Въ одномъ изъ помертныхъ мемуаровъ „Sur la résolution algébrique des équations“ ⁽²⁾ Абель далъ, безъ доказательства, слѣдующую теорему:

⁽¹⁾ Oeuvres complètes, T. 2, p. 222, 1881.

⁽²⁾ Ibid. p. 217—243.

Прилагая къ этой функціи круговую субституцію $\left(z + \frac{k}{z}\right)$, получимъ

$$S \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) = x_k + \alpha^{n-1} x_{k+1} + \alpha^{n-2} x_{k+2} + \dots + \alpha x_{k-1} \dots \dots \dots (4),$$

гдѣ $S_k = \left(z + \frac{k}{z}\right)$. Умножая обѣ части (3) на α^k , получимъ

$$\begin{aligned} \alpha^k R_1^{\frac{1}{n}} &= \alpha^k x_0 + \alpha^{k-1} x_1 + \alpha^{k-2} x_2 + \dots + x_k + \alpha^{n-1} x_{k+1} \\ &+ \alpha^{n-2} x_{k+2} + \dots + \alpha^{k+1} x_{n-1} \dots \dots \dots (5). \end{aligned}$$

Сравнивая (4) и (5), убѣждаемся, что

$$S_k \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha^k R_1^{\frac{1}{n}}. \text{ ч. и. с. д.}$$

§ 3. *Слѣдствіе.* Называя $\left(z + \frac{1}{z}\right) = S$, получимъ

$$S \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha R_1^{\frac{1}{n}},$$

$$S^2 \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha^2 R_1^{\frac{1}{n}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S^{n-1} \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что степени круговой субституціи $S = \left(z + \frac{1}{z}\right)$, будучи приложены послѣдовательно къ $R_1^{\frac{1}{n}}$, даютъ рядъ

$$R_1^{\frac{1}{n}}, \alpha R_1^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 R_1^{\frac{1}{n}}, \dots \dots \dots \alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}} \dots \dots \dots (6)$$

Вообще степени круговой субституціи $S = \left(z + \frac{1}{z}\right)$ обращаютъ $R_i^{\frac{1}{n}}$ послѣдовательно въ

$$R_i^{\frac{1}{n}}, \alpha^i R_i^{\frac{1}{n}}, \alpha^{2i} R_i^{\frac{1}{n}}, \dots \dots \dots \alpha^{(n-1)i} R_i^{\frac{1}{n}}.$$

§ 4 Теорема II. Субституція $T = \left(\begin{smallmatrix} kz \\ z \end{smallmatrix} \right)$, будучи приложена къ $R_1^{\frac{1}{n}}$, обращаетъ эту функцію въ $R_i^{\frac{1}{n}}$, гдѣ i определяется сравненіемъ $ki \equiv 1 \pmod{n}$ и гдѣ, вмѣсто указателей kz , надлежитъ брать наименьшіе положительные вычеты ихъ по модулю n .

Доказательство. Къ функціи

$$R_1^{\frac{1}{n}} = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha^{n-i}x_i + \dots + \alpha x_{n-k-1}$$

приложимъ субституцію $T = \left(\begin{smallmatrix} kz \\ z \end{smallmatrix} \right)$; получимъ

$$T(R_1^{\frac{1}{n}}) = x_0 + \alpha^{n-1}x_k + \alpha^{n-2}x_{2k} + \dots + \alpha^{n-i}x_{ki} + \dots + \alpha x_{n-k}.$$

Пусть

$$ki \equiv 1 \pmod{n}.$$

тогда

$$2ki \equiv 2, 3ki \equiv 3, \dots \pmod{n}.$$

На этомъ основаніи

$$T(R_1^{\frac{1}{n}}) = x_0 + \alpha^{n-i}x_1 + \alpha^{n-2i}x_2 + \dots + \alpha^i x_{n-1}, \dots \quad (7)$$

Но изъ уравненій (2) имѣемъ

$$R_i^{\frac{1}{n}} = x_0 + \alpha^{n-i}x_1 + \alpha^{n-2i}x_2 + \dots + \alpha^i x_{n-1}, \dots \quad (8).$$

Сравнивая (7) и (8), убѣждаемся, что

$$T(R_1^{\frac{1}{n}}) = R_i^{\frac{1}{n}}, \text{ ч. и. с. д.}$$

§ 5. Слѣдствіе. Пусть ϱ первообразный корень первоначальнаго числа n ; тогда $\varrho^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$; всѣ-же другія степени ϱ сравнимы съ числами $2, 3, 4, \dots, \overline{n-1}$.

Пусть поэтому $\varrho^{n-2} \equiv a, \varrho^{n-3} \equiv b, \dots, \varrho^1 \equiv k \pmod{n}$, гдѣ $a, b, c, \dots, k$ суть различные между собою члены ряда $2, 3, \dots, \varrho-1, \varrho+1, \dots, n-1$. Назовемъ $T = \left(\begin{smallmatrix} \varrho z \\ z \end{smallmatrix} \right)$, тогда $T^{n-1} = \left(\begin{smallmatrix} \varrho^{n-1} z \\ z \end{smallmatrix} \right) = 1$.

Прилагая послѣдовательно всѣ степени T къ функціи $R_1^{\frac{1}{n}}$, получимъ рядъ равенствъ.

$$\begin{aligned} T \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) &= R_a^{\frac{1}{n}} \\ T^2 \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) &= R_b^{\frac{1}{n}} \\ &\dots \dots \dots \\ T^{n-2} \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) &= R_{\varrho}^{\frac{1}{n}} \\ T^{n-1} \left(R_1^{\frac{1}{n}} \right) &= R_1^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

гдѣ указатели $a, b, c, \dots, k$ суть наименьшіе положительные вычеты $\varrho^2, \varrho^3, \dots, \varrho^{n-2}$ по модулю n .

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что, вообще, различные степени субституціи T , будучи приложены къ $R_i^{\frac{1}{n}}$ даютъ рядъ

$$R_i^{\frac{1}{n}}, R_{ai}^{\frac{1}{n}}, R_{bi}^{\frac{1}{n}}, \dots, R_{\varrho i}^{\frac{1}{n}}.$$

§ 6. При помощи двухъ субституцій S и T составимъ таблицу

$$\left. \begin{aligned} &1, S, S^2, S^3, \dots, S^{n-1}, \\ &T, ST, S^2T, S^3T, \dots, S^{n-1}T, \\ &\dots \dots \dots \\ &T^{n-2}, ST^{n-2}, S^2 T^{n-2}, \dots, S^{n-1} T^{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таблица (9) образуетъ *группу* (un système conjugué) Субституціи этой группы, будучи приложены послѣдователь-

влечетъ за собою равенство

$$T^{(\beta-\beta')} = U_{\alpha}^{-1} U_{\alpha'} \dots \dots (14),$$

чего не можетъ быть, такъ какъ произведеніе $U_{\alpha}^{-1} U_{\alpha'}$ перемѣщаетъ, по большей мѣрѣ, $(n-2)$ указателя (11), а субституція $T^{(\beta-\beta')}$ перемѣщаетъ всѣ индексы, кромѣ нуля. Равенство (14) возможно только въ томъ случаѣ, когда $\beta = \beta'$, но тогда $U_{\alpha} = U_{\alpha'}$.

Итакъ, таблица (13) содержитъ 1.2.3..... $(n-1)$ различныхъ субституцій, не перемѣщающихъ x_0 , а потому совокупность ихъ даетъ группу порядка

$$N = 1.2.3 \dots n-1.$$

Легко убѣдиться, что въ каждой горизонтальной строкѣ табл. (13) есть только одна субституція, не измѣняющая $R_1^{\frac{1}{n}}$. Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что въ строкѣ

$$U_{\alpha}, U_{\alpha} T, U_{\alpha} T^2, \dots U_{\alpha} T^k, \dots U_{\alpha} T^l, \dots U_{\alpha} T^{n-2}$$

есть двѣ субституціи $U_{\alpha} T^k$ и $U_{\alpha} T^l$, не измѣняющія функціи $R_1^{\frac{1}{n}}$. Въ этомъ предположеніи и субституція $(U_{\alpha} T^l)^{-1} = T^{-l} U_{\alpha}^{-1}$ также не измѣнитъ $R_1^{\frac{1}{n}}$, а потому и произведеніе

$$T^{-l} U_{\alpha}^{-1} \cdot U_{\alpha} T^k = T^{k-l}$$

не измѣнитъ $R_1^{\frac{1}{n}}$; а это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда $k=l$, что противорѣчитъ положенію.

Отсюда слѣдуетъ, что существуетъ $M = 1.2.3 \dots n-2$ различныхъ субституцій, не измѣняющихъ $R_1^{\frac{1}{n}}$. Субституціи эти заключаются въ формѣ $U_{\alpha} T^{\beta}$, гдѣ $\alpha \leq M-1$, $\beta \leq n-2$ и, очевидно, образуютъ группу ⁽¹⁾. На основаніи

⁽¹⁾ Serret, cours d'algèbre supérieure, T. 2, p. 386, 1866.

извѣстныхъ теоремъ Bertrand'a и Serret ⁽¹⁾ мы знаемъ, что, если порядокъ группы, относящейся до $(n-1)$ буквъ, определяется произведеніемъ $1.2.3 \dots n-2, \dots$ то группа эта содержитъ всѣ субституціи, которыя можно составить изъ $(n-2)$ буквъ. Поэтому группа субституцій вида $U_\alpha T^\beta$, не измѣняющая $R_1^{\frac{1}{n}}$, содержитъ всѣ субституціи, не распространяющіяся на одну изъ буквъ

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1};$$

въ чемъ и заключается предложенная теорема.

Необходимое замѣчаніе. Теоремы Bertrand'a и Serret, которыми мы воспользовались, допускаютъ исключеніе, когда $n=7$; въ этомъ случаѣ $n-1=6$, а тогда, кромѣ группы, состоящей изъ всѣхъ субституцій пяти буквъ, можно составить группу того-же порядка, содержащую круговыя субституціи 4-го, 5-го и 6-го порядка. Легко понять, что группа эта не можетъ удовлетворить требованіямъ теоремы III. Въ самомъ дѣлѣ группа 120-го порядка, составляющая исключеніе изъ теоремъ Bertrand'a и Serret, содержитъ круговую субституцію

$$\Phi = (x_1 \ x_5 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_6) \text{ } ^{(2)}.$$

Имѣя въ виду, что 3 есть первообразный корень, назовемъ $T = \begin{pmatrix} 3z \\ z \end{pmatrix}$, тогда $T^2 = \begin{pmatrix} 9z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & x_6 & x_1 & x_3 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$, или $T^2 = (x_1 \ x_2 \ x_4) (x_3 \ x_6 \ x_5)$. Ясно, что $\Phi^2 = T^2$, слѣд. T^2 есть членъ рассматриваемой группы; но $T^2(R_1^{\frac{1}{n}}) = R_6^{\frac{1}{n}}$; слѣдовательно группа, содержащая круговыя субституціи

⁽¹⁾ Ibid. p. 296, T. 2.

⁽²⁾ Ibid. T. 2, 311.

4-го, 5-го и 6-го порядка, не может быть тождественна съ группою того-же порядка, которой всѣ субституціи не измѣняютъ $R_1^{\frac{1}{n}}$.

§ 9. Разсуждая съ буквальною точностію по предыдущему, убѣдимся, что группа субституцій, не измѣняющая $\alpha^{pk} R_k^{\frac{1}{n}}$ состоитъ изъ $M=1.2.3.... n-2$ членовъ, не перемѣщающихъ x_p и еще нѣкотораго корня x_q .

§ 10. Теорема IV. Каждая изъ функцій вида $\alpha^k R_l^{\frac{1}{n}}$ можетъ быть выражена раціонально въ двухъ корняхъ уравненія, надлежащимъ образомъ выбранныхъ.

Доказательство. Возьмемъ одну изъ данныхъ функцій $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$. Функція эта не измѣняетъ своей величины отъ всевозможныхъ субституцій надъ корнями

$$x_0, x_1, \dots x_k, \dots x_l, \dots x_{n-1}$$

за исключеніемъ x_k и еще нѣкотораго корня x_l ; а потому $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$ есть цѣлая, раціональная, симметрическая функція корней уравненія

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_{l-1})(x-x_{l+1})\dots(x-x_{n-1})=0$$

Если

$$f(x)=0. \dots \dots (16)$$

есть данное уравненіе, то $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$ выражается раціонально въ коэффициентахъ уравненія

$$\frac{F(x)}{(x-x_k)(x-x_l)}=0,$$

а потому выразится раціонально въ x_k и x_l , ч. и. с. д.

§ 11. Теорема V. Каждый изъ корней даннаго уравненія (16) обладаетъ способностію выражаться раціонально

черезъ каждую изъ функцій (A) § 6, если корни двучленнаго уравненія $\alpha^n - 1 = 0$ считать *раціонально извѣстными*.

Доказательство. Воспроизвожу здѣсь разсужденія, при помощи которыхъ *Galois* доказалъ одну изъ основныхъ своихъ теоремъ ⁽¹⁾. Мы знаемъ, что группа субституцій порядка $N = 1.2.3....\overline{n-1}$, оставляющая x_0 безъ измѣненія, даетъ для $R_1^{\frac{1}{n}}$ только $(n-1)$ значеній $R_1^{\frac{1}{n}}, R_2^{\frac{1}{n}}, \dots, R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$. Составимъ уравненіе

$$(\zeta - R_1^{\frac{1}{n}}) (\zeta - R_2^{\frac{1}{n}}) (\zeta - R_3^{\frac{1}{n}}) \dots (\zeta - R_{n-1}^{\frac{1}{n}}) = 0 \dots (17).$$

Коеффиціенты этого уравненія суть симметрическія функціи корней $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ уравненія $\frac{F(x)}{x-x_0} = 0$, а потому выражаются раціонально черезъ x_0 . На этомъ основаніи уравненію (17) можно дать видъ

$$F(\zeta, x_0) = 0$$

Данное уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ общій корень x_0 съ каждымъ изъ уравненій

$$F(R_1^{\frac{1}{n}}, x) = 0; F(R_2^{\frac{1}{n}}, x) = 0, \dots, F(R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, x) = 0, \dots (18)$$

Легко доказать, что ни одно изъ уравн. (18) не имѣетъ другаго общаго корня съ урав. $f(x) = 0$.

Для этого допустимъ, что уравненіе

$$F(R_k^{\frac{1}{n}}, x) = 0 \dots (19)$$

удовлетворяется отъ подстановки x_j вмѣсто x , т. е. что имѣемъ тождество

$$F(R_k^{\frac{1}{n}}, x_j) = 0 \dots (20)$$

⁽¹⁾ Serret, cours d'algèbre superieure, 1866, T. 2, p. 413—420.

Уравненіе

$$F(\zeta, x_j) = 0. \dots (21)$$

Выводится изъ (17) черезъ круговую субституцію $(z + j)$,
слѣд. ур. (21) въ распространенномъ видѣ будетъ

$$(\zeta - \alpha^j R_1^{\frac{1}{n}}) (\zeta - \alpha^{2j} R_2^{\frac{1}{n}}) \dots (\zeta - \alpha^{n-j} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}) = 0.$$

Этому послѣднему уравненію, очевидно, не удовлетворяетъ корень $\zeta = R_k^{\frac{1}{n}}$, слѣд. тождество (20) несправедливо, а потому и предположеніе наше, заключающееся въ томъ, что одному изъ ур. (18) удовлетворяетъ x_j , несправедливо. И такъ каждое изъ уравн. (18) имѣетъ только одинъ общій корень x_0 съ даннымъ уравненіемъ $f(x) = 0$, а потому многочленъ $f(x)$ съ каждымъ изъ многочленовъ (18) имѣетъ общаго наибольшаго дѣлителя первой степени относительно x . Будемъ искать этого дѣлителя между $f(x)$ и $F(\zeta, x)$; достигнувши остатка первой степени относительно x , приравняемъ его нулю; отъ этого x обратится въ x_0 , который и выразится раціонально черезъ ζ , а вмѣсто ζ можно подставить каждую изъ функцій $R_1^{\frac{1}{n}}, R_2^{\frac{1}{n}}, \dots, R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что вообще x_k выразится раціонально черезъ $\alpha^k R_1^{\frac{1}{n}}, \alpha^{2k} R_2^{\frac{1}{n}}, \dots, \alpha^{n-k} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$. И такъ каждый корень выражается раціонально въ каждой изъ функцій (A) § 5, если считать корни двучленнаго уравненія $\alpha^n - 1 = 0$ раціонально извѣстными.

Слѣдствіе. Изъ предъидущей теоремы слѣдуетъ, что функціи

$$R_1^{\frac{1}{n}}, R_2^{\frac{1}{n}}, R_3^{\frac{1}{n}}, \dots, R_{n-2}^{\frac{1}{n}}$$

А такъ какъ

$$(\alpha_{ki} R_k^{\frac{1}{n}})^n = R_k$$

то транспозиція (x_i, x_j) замѣняетъ въ рядѣ $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ одинъ членъ другимъ; слѣд. симметрическая функція количествъ $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ не измѣняется ни одной транспозиціей; а потому не измѣняется ни одной изъ числа $N_1 = 1. 2. 3. \dots n$ субституцій. Отсюда слѣдуетъ, что всякая симметрическая функція $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ будетъ раціонально извѣстна, слѣдовательно и коэффициенты уравненія (22) будутъ раціонально извѣстны.

Докажемъ, во вторыхъ, что корни уравненія (22) всѣ выражаются раціонально при помощи одного изъ нихъ, выбраннаго по произволу.

Имѣемъ

$$R_1 = (x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha x_{n-1})^n.$$

Такъ какъ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ всѣ выражаются раціонально въ одной какой нибудь изъ функцій

$$R_1^{\frac{1}{n}}, R_2^{\frac{1}{n}}, \dots, R_{n-1}^{\frac{1}{n}},$$

то R_1 можно выразить раціонально въ функціи, напримѣръ, $R_2^{\frac{1}{n}}$; слѣдовательно можно написать

$$R_1 = \frac{\Phi(R_2^{\frac{1}{n}})}{\Theta(R_2^{\frac{1}{n}})} \dots \dots \dots (23)$$

гдѣ Φ и Θ суть цѣлыя функціи. Уничтожая радикаль $R_2^{\frac{1}{n}}$ въ знаменателѣ (23), получимъ

$$R_1 = a_0 + a_1 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 R_2^{\frac{2}{n}} + \dots + a_{n-1} R_2^{\frac{n-1}{n}} \dots \dots (24),$$

гдѣ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ суть раціональныя функціи R_2 . Прилагая къ уравненію (24) послѣдовательно всѣ степени круговой субституціи $S = \left(\frac{z+1}{z} \right)$ получимъ (теор. 1)

$$R_1 = a_0 + a_1 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 R_2^{\frac{2}{n}} + \dots + a_{n-1} R_2^{\frac{n-1}{n}}$$

$$R_1 = a_0 + a_1 \alpha^2 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^4 R_2^{\frac{2}{n}} + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-2} R_2^{\frac{n-1}{n}}$$

$$R_1 = a_0 + a_1 \alpha^4 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^8 R_2^{\frac{2}{n}} + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-4} R_2^{\frac{n-1}{n}}$$

$$R_1 = a_0 + a_1 \alpha^{n-2} R_2^{\frac{1}{n}} + \dots + a_{n-1} \alpha^2 R_2^{\frac{n-1}{n}}$$

Складывая полученныя равенства, находимъ

$$R_1 = a_0,$$

слѣд. R_1 выражается раціонально въ R_2 . Отсюда ясно, какъ это въ первый разъ замѣтилъ Кронеккеръ, ⁽¹⁾ что уравненіе (22) относится къ категоріи Абелевыхъ ⁽²⁾

Теорема VIII Galois (Обратная).

Если каждый корень не приводимаго уравненія $f(x)=0$, первоначальной степени, выражается раціонально въ двухъ другихъ корняхъ, выбранныхъ по произволу, — уравненіе разрешимо въ радикалахъ.

Доказательство. Составимъ функцію

$$P_1 = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha x_{n-1}, \text{ гдѣ } \alpha \text{ есть одинъ}$$

изъ корней уравненія $\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0$. Такъ какъ всѣ корни уравненія $f(x)=0$ выражаются раціонально въ двухъ корняхъ, выбранныхъ по произволу, то можно взять

$$P_1 = \varphi(x_0, x_1). \dots (26),$$

⁽¹⁾ Serret, cours d'algèbre supérieure, 1866, Т. 2, p. 657—664.

⁽²⁾ N. H. Abel, Oeuvres complètes. 1881. Т. 1, p. 478—507.

гдѣ φ есть раціональная функція. Прилагая къ обѣимъ частямъ равенства (26) всѣ субституціи вида $\left(\begin{smallmatrix} az+b \\ z \end{smallmatrix} \right)$ [таблица 9, § 6], получимъ для P_1 рядъ значеній

$$\left. \begin{array}{l} P_1, \alpha P_1, \alpha^2 P_1, \dots, \alpha^{n-1} P_1, \\ P_a, \alpha P_a, \alpha^2 P_a, \dots, \alpha^{n-a} P_a; \\ \dots \dots \dots \\ P_\rho, \alpha P_\rho, \alpha^2 P_\rho, \dots, \alpha^{n-\rho} P_\rho \end{array} \right\} (D),$$

гдѣ $a, b, c, \dots, \rho$ имѣютъ значенія, указанные въ § 5. Функція $\varphi(x_0, x_1)$ получитъ рядъ значеній

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x_0, x_1), \varphi(x_1, x_2), \dots, \varphi(x_{n-1}, x_n) \\ \varphi(x_0, x_\rho), \varphi(x_1, x_{\rho+1}), \dots, \varphi(x_{n-1}, x_{\rho-1}) \\ \dots \dots \dots \\ \varphi(x_0, x_a), \varphi(x_1, x_{a+1}), \dots, \varphi(x_{n-1}, x_{a-1}) \end{array} \right\} (E).$$

Таблицею (E) исчерпываются всѣ значенія φ ; а потому таблицею (D) исчерпываются всѣ значенія P_1 . Назовемъ черезъ λ одинъ изъ корней уравненія $\lambda^{n-1} - 1 = 0$, не исключая единицы и составимъ функцію

$$(P_1^n + \lambda P_a^n + \lambda^2 P_b^n + \dots + \lambda^{n-2} P_\rho^n)^{n-1} = \Theta_1 = \Phi(x_0, x_1)$$

Ясно, что $\Theta_1 = \Phi(x_0, x_1)$ не измѣняется субституціею $S = \left(\begin{smallmatrix} z+1 \\ z \end{smallmatrix} \right)$, ибо S не измѣняетъ $P_1^n, P_a^n, \dots$ кромѣ того Θ_1 не измѣняется субституціею $T = \left(\begin{smallmatrix} \rho z \\ z \end{smallmatrix} \right)$, ибо $T(P_1) = P_a, T(P_a) = T^2(P_1) = P_b, \dots$, а потому

$$\Theta_1 = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \Phi(x_0, x_1) + \Phi(x_1, x_2) + \dots + \Phi(x_{n-1}, x_a) \right\}$$

Видно, что Θ_1 есть симметрическая функція корней $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, а потому есть количество раціонально извѣстное.

Будемъ имѣть, очевидно, $(n-1)$ уравненій

$$P_1^n + P_a^n + \dots + P_\rho^n = V \overline{\Theta_0},$$

$$P_1^n + \lambda P_a^n + \dots + \lambda^{n-2} P_\rho^n = V \overline{\Theta_1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_1^n + \lambda^{n-2} P_a^n + \dots + \lambda P_\rho^n = V \overline{\Theta_{n-2}},$$

гдѣ $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-2}$ всѣ рационально извѣстны. Изъ этихъ уравненій $P_1^n, P_2^n, P_3^n, \dots, P_{n-1}^n$ выразятся линейно въ $V \overline{\Theta_0}, V \overline{\Theta_1}, V \overline{\Theta_2}, \dots, V \overline{\Theta_{n-2}}$, слѣд. найдутся $P_1, P_2, \dots$, а тогда найдутся въ радикалахъ и корни даннаго уравненія, въ чемъ и состоитъ предложенная теорема.

